УДК 514.18

***Наталія АНДРЄЄВА***
astronataa@gmail.com
***Анатолій ХОМЧЕНКО***
khan@chmnu.edu.ua
м. Миколаїв

# ЙМОВІРНІСНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СЕРЕНДИПОВИХ ПОВЕРХОНЬ

*В роботі серендипові поверхні розглядаються як функції випадкового вектора. Це дає нове тлумачення інтегральних характеристик, зокрема, математичного сподівання. Замість подвійного інтегрування запропоноване просте і зручне правило 9-ти аплікат, яке забезпечує точний результат.*

***Ключові слова**: серендипові поверхні, бікубічна інтерполяція, нестандартний базис, математичне сподівання, метод Монте-Карло, випадковий вектор.*

## Постановка проблеми

Перші спроби застосувати геометричну ймовірність в методі скінченних елементів (МСЕ) стосуються саме серендипових поверхонь. Завдяки геометричній ймовірності виникла конструктивна теорія серендипових апроксимацій, з'явилися нові (альтернативні) моделі з особливими властивостями і числовими характеристиками, які можна «замовляти». Розглядаючи серендипові поверхні як функції випадкового вектора, ми відкриваємо нові тлумачення інтегральних характеристик серендипових елементів. В першу чергу це стосується стандартних серендипових елементів вищих порядків, інтегральні характеристики яких, на думку О. Зенкевича, протиприродні і не відповідають здоровому глузду. Ми спробували реабілітувати стандартні моделі. Для поверхонь із складним рельєфом ми пропонуємо обчислювати математичне сподівання функції випадкового вектора не подвійним інтегруванням, а методом Монте-Карло. Виявляється, що можна суттєво зменшити обсяг обчислення і спростити процедуру, якщо замість простої вибірки скористатися стратифікованою вибіркою (правило 9-ти аплікат). На прикладі елементів бікубічної інтерполяції доведено, що зважене середнє співпадає із математичним сподіванням.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Серендипові елементи вперше (1968 р.) з'явилися в роботі Ергатудіса, Айронса і Зенкевича [1] як інструмент ізопараметричних перетворень чотирикутників. В цій роботі були отримані підбором базисні функції біквадратичної та бікубічної інтерполяції. В літературі з МСЕ ці елементи називають стандартними. У 1982 р. [2, 3] стандартні та нестандартні (альтернативні) моделі були вперше отримані за допомогою ймовірнісно-геометричної процедури. У книзі [4] О. Зенкевич звернув увагу на фізичну неадекватність спектру вузлових навантажень на елементах вищих порядків від одиничної масової сили. Стало зрозуміло, що фізичної інтерпретації фахівця з будівельної механіки недостатньо, щоб пояснити появу від'ємних «навантажень» на кутові вузли носія. На нашу думку корисно звернутися до ймовірнісно-геометричної інтерпретації серендипових поверхонь. В цій роботі ми розглядаємо серендипові поверхні як функції випадкового вектора, точніше, радіуса-вектора.

## Постановка завдання

Мета статті – запропонувати нову інтерпретацію серендипових поверхонь та їх числових характеристик, яка створює умови для «суперечки» моделей. Метод інтерпретації сьогодні є провідним у математичному моделюванні, а ймовірнісна інтерпретація має повернути природний зміст фізично неадекватним інтегральним характеристикам серендипових поліномів.

### Виклад основного матеріалу

Означення випадкового вектора і функції випадкового вектора наведені в [5]. Формула для математичного сподівання функції форми $N_i(x,y)$ СЕ ($|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$) має вигляд [6]:

$$m_i = \frac{1}{4}\iint_D N_i(x,y)\partial x \partial y. \qquad (1)$$

Нагадаємо властивості функції впливу $N_i(x,y)$:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \sum_{i=1}^{12} N_i(x,y) = 1, \quad (2)$$

де $\delta_{ik}$ – символ Кронекера, $i$ – номер функції, $k$ – номер вузла інтерполяції.

З геометричної точки зору $m_i$ співпадає з середнім арифметичним аплікат поверхні $f(x,y) = N_i(x,y)$. Зрозуміло, що середнє значення аплікат може бути від'ємним, якщо більша частина об'єму тіла розташована під носієм фінітної функції.

На випадок, коли подвійне інтегрування з будь-яких причин ускладнюється, ми пропонуємо замінити інтеграл (1) інтегральною сумою. Для цього треба визначити досить велику кількість аплікат: $f_1, f_2, \ldots, f_n$ і оцінити математичне сподівання функції випадкового аргумента за методом Монте-Карло:

$$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i. \qquad (3)$$

Точність формули (3) суттєво залежить від довжини серії експериментів (вимірювань), якщо вибірка проста. Більш ефективною є стратифікована вибірка (усереднення з ваговими коефіцієнтами). Виявляться, що на елементі Q12 достатньо зробити лише 9 вимірювань, щоб отримати точне значення $\bar{f}$. Правило 9-ти аплікат має вигляд:

$$\bar{f} = \frac{4}{9}\cdot f_0 + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{9}\sum_{i=5}^{8} f_i. \quad (4)$$

На рис. 1 зображені обчислювальний шаблон і три портрети ліній нульового рівня кутових поверхонь $N_1(x,y)$, що успішно пройшли тестування формулою (4).

Спільна особливість моделей А, В, С в тому, що усі лінії нульового рівня – прямі. Цікаво дізнатися, скільки таких моделей існує на СЕ Q12? Це питання окремої публікації. На рис. 1 області від'ємних значень функції $N_1(x,y)$ заштриховані. Щоб забезпечити можливість перевірки властивостей (2), ми наведемо формули для «кутових» функцій $N_1(x,y)$ і «проміжних» – $N_5(x,y)$.

Модель А:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\times$$
$$\times(3x+3y+2)(3x+3y+4);$$

$$N_5(x,y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(-3x-y).$$

Модель В:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{64}(1-x)(1-y)\times$$
$$\times(3x+6y+5)(6x+3y+5);$$

$$N_5(x,y) = \frac{9}{128}(1-x^2)(1-y)\times$$
$$\times(-12x-5y-1).$$

Модель С:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{256}(1-x)(1-y)\times$$
$$\times(1-9x^2)(1-9y^2);$$

$$N_5(x,y) = \frac{9}{512}(1-x^2)(1-y)\times$$
$$\times(-48x-9y+7).$$

Покажемо, як «працює» формула (4). Для моделі А:

$$f_0 = \frac{1}{4},\ f_1 = 1,\ f_2 = f_3 = f_4 = 0,$$

$$f_5 = f_8 = -\frac{1}{16},\ f_6 = f_7 = 0.$$

Отже, $\bar{f} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{36}\cdot 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$.

Цей результат співпадає з результатом подвійного інтегрування (1). До речі, стандартна модель, як відомо [4], дає $\bar{f} = -\frac{1}{8}$. Саме цей результат О. Зенкевич назвав протиприродним.

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

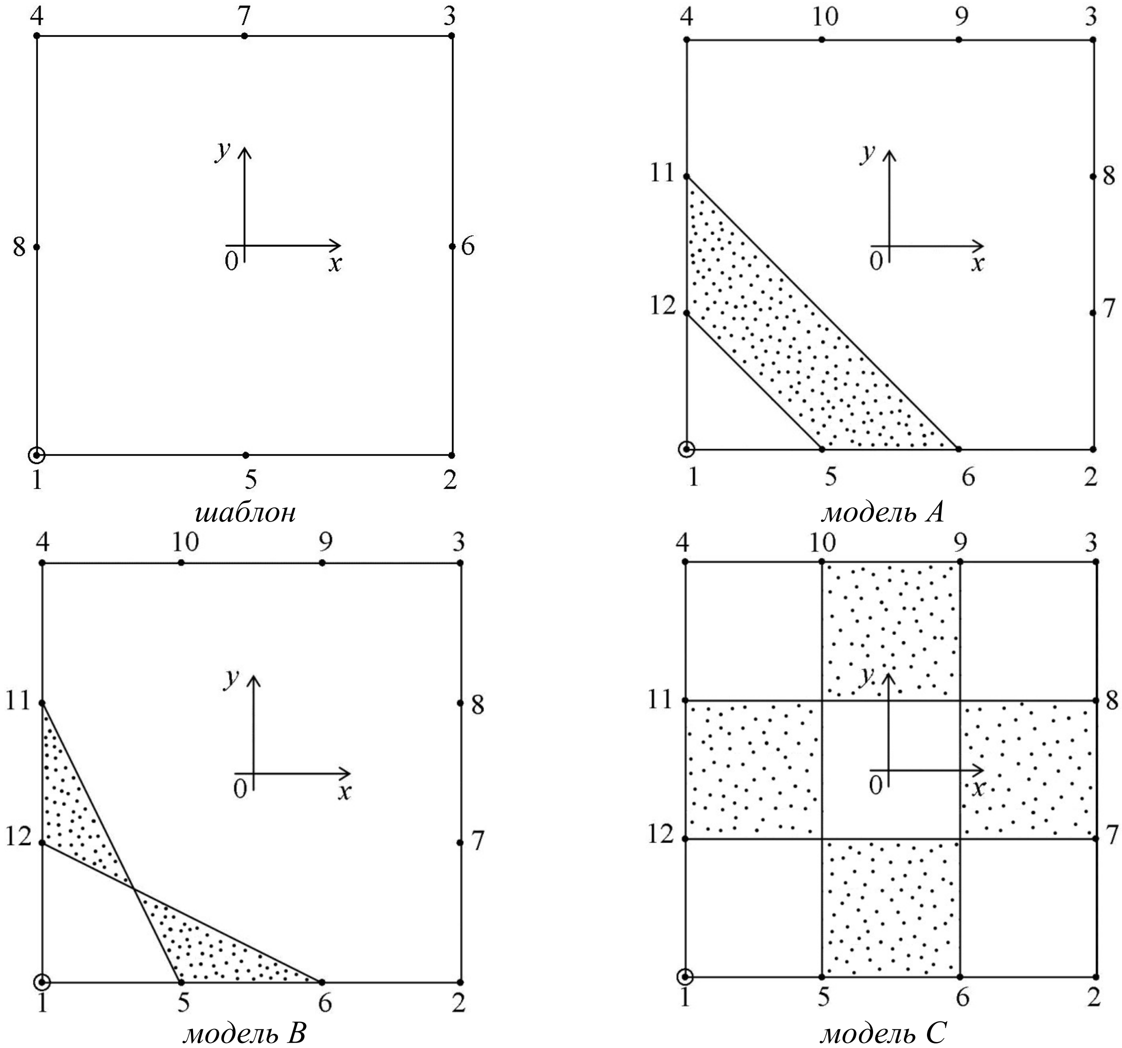


Рис. 1. Обчислювальний шаблон і три моделі Q12

## Висновки і перспективи досліджень

Ймовірнісна інтерпретація базису Q12 відкриває можливості наповнити природним змістом спектр вузлових «навантажень» СЕ вищого порядку. Правило 9-ти аплікат є двовимірним аналогом правила параболічних трапецій (Сімпсона). Цікаво, що із 9-ти аплікат на всіх моделях продуктивно задіяні лише 4. Цього цілком достатньо для отримання точного значення інтегральних характеристик $\bar{f}$.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ergatoudis, I. Curved isoparametric “quadrilateral” elements for finite element analysis [Text] / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zenkiewich // Int. J. Solids Struct. – № 4. – 1968. – P. 31-34.
2. Хомченко, А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ [Текст] / А.Н. Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. – 9 с. – Деп. В ВИНИТИ 18.02.82, № 1213.
3. Хомченко, А.Н. Метод конечных элементов: стохастический подход [Текст] / А.Н. Хомченко. – Ивано-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. – 7 с. – Деп. В ВИНИТИ 15.10.82, № 5167.
4. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О.Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
5. Вентцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Радио и связь, 1983. – 416 с.

6. Кременченко, О.С. Когнітивне моделювання серендипового елемента Q12 на основі кубатур Гаусса [Текст] / О.С. Кременченко, Є.А. Завалко, А.Н. Хомченко // Геометричне моделювання та інформаційні технології. – № 2(4). – Миколаїв : МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2017. – С. 28-32.

***Nataliia ADRIEIEVA, Anatolii KHOMCHENKO***
Mykolayiv

## PROBABILISTIC INTERPRETATION OF SERENDIPITY SURFACES

*In the paper serendipity surfaces are considered as functions of a random vector. This gives a new interpretation of the integral characteristics, in particular, the expected value. Instead of double integration, the simple and easy 9 application rule that provides the exact result is proposed.*

***Keywords:*** *surface of serendipity family, bicubic interpolation, non-standard basis, expected value, Monte-Carlo method, random vector.*

***Наталия АНДРЕЕВА, Анатолий ХОМЧЕНКО***
Николаев

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЕРЕНДИПОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*В работе серендиповы поверхности рассматриваются как функции случайного вектора. Это дает новое толкование интегральным характеристикам, в частности математическому ожиданию. Вместо двойного интегрирования предложено простое и удобное правило 9-ти аппликат, которое обеспечивает точный результат.*

***Ключевые слова***: *серендиповы поверхности, бикубическая интерполяция, нестандартный базис, математическое ожидание, метод Монте-Карло, случайный вектор.*

Стаття надійшла до редколегії 29.03.2018