

ПРАВИЛО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ТРАПЕЦИЙ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

В статье рассматриваются центрированные вычислительные шаблоны (версия Ньютона-Котеса) для приближенной оценки двойных и тройных интегралов. Прообразом центрированных кубатур является известная формула Симпсона (3 узла). Предложен упрощенный прием конструирования вычислительных формул. Установлено, что 2D и 3D аналоги шаблона Симпсона, как правило, наследуют строгую зависимость между весом в барицентре и весом в вершине шаблона. Другие (более громоздкие) процедуры конструирования кубатур (на треугольнике, квадрате, тетраэдре и гексаэдре) подтверждают, что отношение веса в барицентре шаблона к весу в вершине равно n^2 , где n – число вершин шаблона. Этот факт легко распространяется на другие геометрические формы центрированных шаблонов.

Ключевые слова: кубатурные формулы, вычислительные шаблоны, центрированные конечные элементы, спектр узловых нагрузок.

Правило параболических трапеции относится к приемам численного интегрирования и позволяет оценить определенный интеграл по трем значениям подинтегральной функции: на концах интервала интегрирования и в центре интервала. Эта квадратура получила весьма широкое распространение благодаря своей простоте и приемлемой точности. Представляет интерес конструирование центрированных вычислительных шаблонов и соответствующих кубатурных формул для приближенного вычисления двойных и тройных интегралов. Нами установлено, что центрированные кубатуры наследуют одно полезное свойство трехузловой квадратуры, что позволяет легко и просто находить весовые коэффициенты кубатурных формул. Ниже рассмотрены двумерные шаблоны (треугольник, квадрат) и трехмерные шаблоны (тетраэдр, куб).

К понятию определенного интеграла привела задача вычисления площади криволинейной трапеции, и уже современник Ньютона, Грегори сумел на основе правила параболических трапеций вывести формулу приближённого вычисления определённых интегралов (1668 г.). Ещё раньше эту формулу получил Кавальери (1639 г.). Его книга «Геометрия неделимых» (1635 г.) стала переломной вехой в предыстории интегрального исчисления. В 1615 г. Кеплер опубликовал книгу «Новая стереометрия винных бочек», где впервые появились геометрические прообразы современных интегральных сумм. По этой причине правило параболических трапеций иногда называют правилом Кеплера.

Симпсон вновь открыл эту формулу в 1743 г. С тех пор правило параболических трапеций стали называть правилом Симпсона. Формула Симпсона – частный случай квадратурной формулы Ньютона-Котеса. Алгебраическая степень точности формулы Симпсона равна 3. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса впервые появились в письме Ньютона к Лейбницу в 1676 г., а затем в книге Котеса, которая вышла в 1722 г.

Цель настоящей статьи – дать упрощенный «рецепт» усреднения подинтегральных функций в задачах приближенного вычисления двойных и тройных интегралов. Речь идет о дву- и трехмерных аналогах формулы Симпсона. Особенность этих схем в том, что один из узлов интегрирования расположен в барицентре вычислительного шаблона. Обычно такие кубатуры строились иерархически на основе различных правил взвешенного усреднения или по методу неопределённых коэффициентов [1–4].

Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

не всегда возможно. На практике часто встречаются случаи, когда первообразная $F(x)$ не выражается через элементарные функции или другие достаточно изученные функции, либо выражается слишком сложно. В этих случаях приходится обращаться к приближенному интегрированию с помощью квадратурных (кубатурных) формул. Заметим, что эти формулы позволяют приближенно находить интегралы и таких функций, численные значения которых известны не во всех точках области интегрирования, а только в некоторых, например из таблицы.

Здесь речь пойдет о формуле Симпсона и ее 2D и 3D аналогах. Особенность этой формулы в том, что она приспособлена к центрированным вычислительным шаблонам. Обычно весовые коэффициенты приближенной формулы интегрирования находят путем интегрального усреднения соответствующих интерполяционных полиномов (коэффициент Лагранжа). Вместо этого мы предложим простой и наглядный способ быстрого определения весовых коэффициентов.

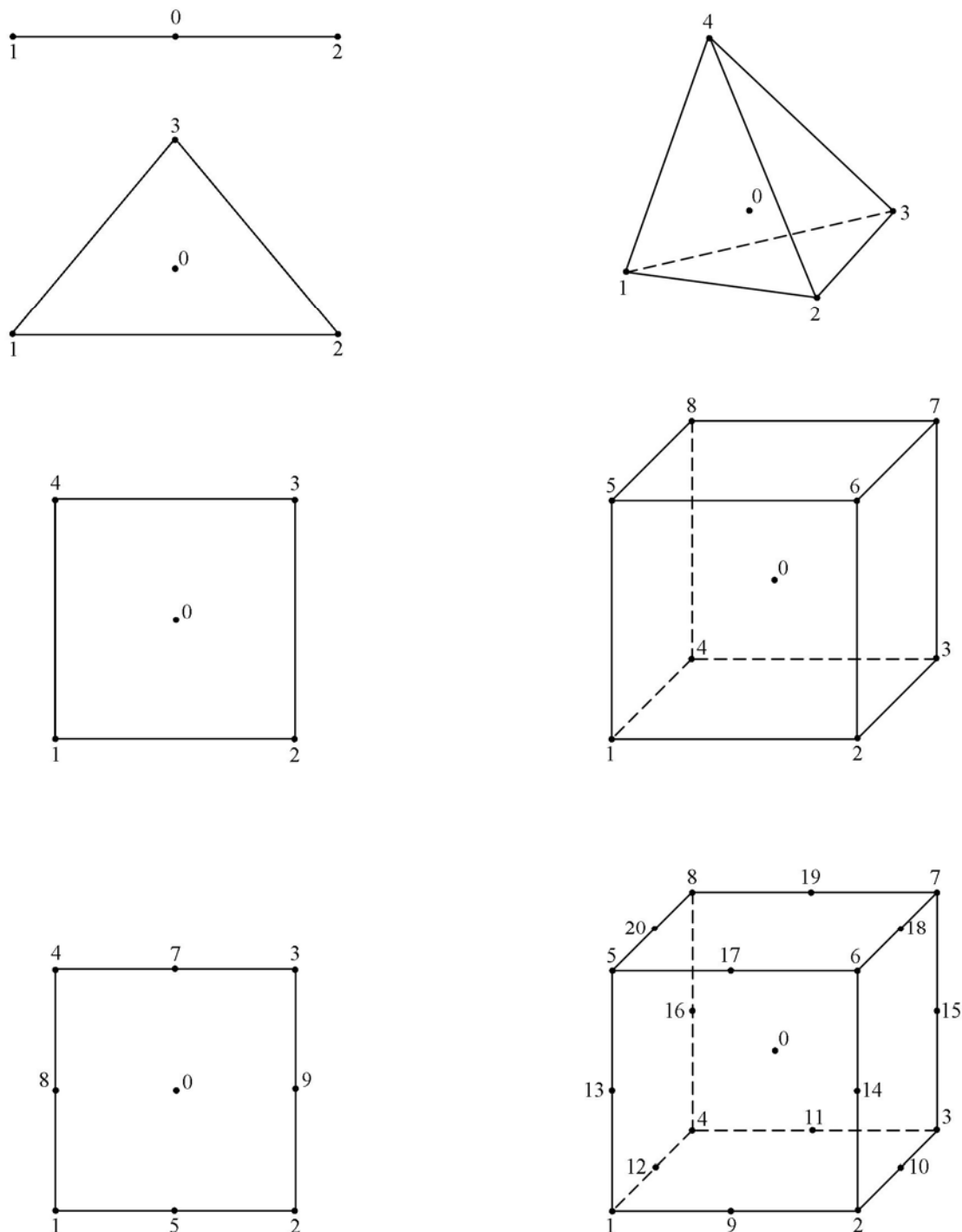


Рис. 1. Симпсоновы вычислительные шаблоны для приближенного интегрирования

Стандартная формула Симпсона для $f(x)$ на $[a, b]$ имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{6} \cdot f(a) + \frac{4}{6} \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{6} \cdot f(b) \right). \quad (2)$$

На рис. 1 показано семейство центрированных шаблонов, для которых стандартный шаблон Симпсона послужил прообразом. Как обычно, сумма весовых коэффициентов равна 1. При этом 2D и 3D шаблоны наследуют еще одно замечательное свойство стандартного шаблона. Оказывается, что весовой коэффициент в барицентре в n^2 раз больше веса в вершине шаблона, где n – число вершин.

Этого достаточно, чтобы сразу получить вычислительную формулу для любого шаблона (рис. 1). При наличии промежуточных узлов (см. квадрат и куб) используется стержневая аналогия и правило Симпсона для одномерной модели. Заметим, что первые успехи метода конечных элементов были связаны с расчетами именно стержневых конструкций (J. H. Argyris, 50-е годы прошлого столетия).

Построим, к примеру, вычислительную формулу для квадрата (9 узлов). Обозначив через x весовую долю узла в вершине, получим весовой баланс в виде

$$4x + 4 \cdot 4x + 16x = 1, \text{ откуда } x = 1/36.$$

Вычислительная формула имеет вид:

$$\iint_D f(x, y) dS \cong \text{mes } D \left(\frac{16}{36} \cdot f_0 + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^4 f_i + \frac{4}{36} \sum_{i=5}^8 f_i \right).$$

Для куба (21 узел) весовой баланс имеет вид:

$$8x + 12 \cdot 4x + 64x = 1, \text{ откуда } x = 1/120.$$

Вычислительная формула

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \approx \text{mes } \Omega \left(\frac{64}{120} \cdot f_0 + \frac{1}{120} \sum_{i=1}^8 f_i + \frac{4}{120} \sum_{i=9}^{S20} f_i \right).$$

В этой формуле мы исправили опечатку, допущенную в работе [2]. Аналогично получаются вычислительные формулы для других шаблонов.

Между весовыми коэффициентами центрированных кубатур замкнутого типа (версия Ньютона-Котеса) обнаружены четкие зависимости, позволяющие легко и быстро конструировать соответствующие вычислительные формулы. Представляет интерес установление зависимостей (если они существуют) на кубатурах открытого типа (версия Гаусса).

Список використаних джерел

1. Зенкевич О. Метод элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
3. Overmire M. V. A Diagonal Mass Matrix with Full Convergence. Rate for Finite Element Dynamical Problem / M. V. Overmire // Trans. Can. Soc. Mech. Eng., vol. 7, № 2, 1983.
4. Зуб П. М. Кубатуры Ньютона-Котеса для пространственных дискретных элементов / П. М. Зуб, А. Н. Хомченко, О. В. Цыбуленко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Зб. наук.праць. — Вип. 5. — Харків : ХДУХТ, 2004. — С. 20—24.
5. Крючковский В. В. Приемы оптимизации свойств дискретных моделей // В. В. Крючковский, А. Н. Хомченко // Вестник ХГТУ. — Херсон : ХГТУ, 1999. — Спецвыпуск : Прикладные проблемы математического моделирования. — С. 92—93.

Anatoliy KHOMCHENKO, Natalia KOVAL

Mykolaiv

THE TRAPEZOIDAL PARABOLIC RULE AND CUBATURE FORMULAS

The article deals with centered computational templates (the Newton-Cotes version) for an approximate evaluation of double and triple integrals. The prototype of centered cubatures is the well-known Simpson's Rule (3 points). A simplified method for constructing computational formulas is proposed. It is established that 2D and 3D analogues of the Simpson pattern tend to inherit a strict relationship between the weight in the barycenter and the weight at the top of the template. Other (more cumbersome) procedures for constructing cubatures (on a triangle, square, tetrahedron and hexahedron) confirm that the weight ratio in the barycenter of the template to the weight at the vertex is equal to n^2 , where n is the number of the template vertices. This fact easily extends to other geometric forms of centered templates.

Key words: cubature formulas, computational templates, centered finite elements, spectrum of nodal loads.

ПРАВИЛО ПАРАБОЛІЧНИХ ТРАПЕЦІЙ ТА КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ

У статті розглядаються центровані обчислювальні шаблони (версія Ньютона-Котеса) для наближеної оцінки подвійних та потрійних інтегралів. Прообразом центрованих кубатур є відома формула Сімпсона (3 вузла). Запропоновано спрощений прийом конструювання обчислювальних формул. Встановлено, що 2D і 3D аналоги шаблону Сімпсона, як правило, успадковують жорстку залежність між вагою у барицентрі і вагою у вершині шаблону. Інші (більш громіздкі) процедури конструювання кубатур (на трикутнику, квадраті, тетраедрі та гексаедрі) підтверджують, що відношення ваги у барицентрі шаблону до ваги у вершині дорівнює n^2 , де n – число вершин шаблону. Цей факт легко поширюється на інші геометричні форми центрованих шаблонів.

Ключові слова: кубатурні формули, обчислювальні шаблони, центровані скінчені елементи, спектр вузлових навантажень.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2017